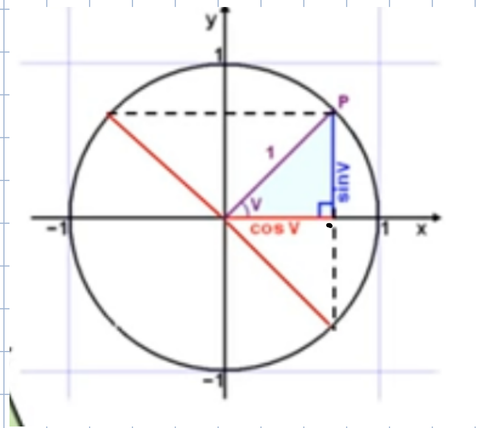
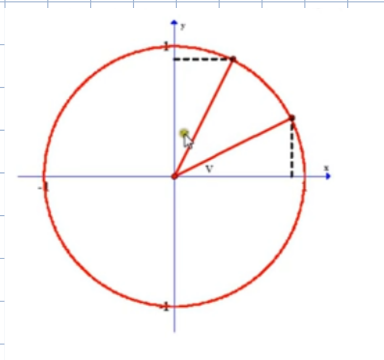
Skills



$\sin v = a \Longrightarrow \sin(180 - v) = a$

$\cos v = b \Longrightarrow \cos(180 - v) = -b$

cos v och sin v har perioden 360°



$\Longrightarrow$ $\sin(90 - v) = \cos v$

$\cos(90 - v) = \sin v$

$\sin(-v) = -\sin v$ $\cos(-v) = \cos v$

$\sin(v + 180) = -\sin v$ $\cos(v + 180) = -\cos v$

$\Longrightarrow \tan(v + 180) = \dfrac{\sin(v+180)}{\cos(v+180)} = \dfrac{-\sin v}{-\cos v} = \dfrac{\sin v}{\cos v}$

$\Longleftrightarrow$ tan v har perioden 180°

Dubbla vinkeln

$\sin 2u = 2\sin u \cdot \cos u$

$$\cos 2u = \begin{cases} \cos^2 u - \sin^2 u \\ 2\cos^2 u - 1 \\ 1 - 2\sin^2 u \end{cases}$$

"Välj den som passar situationen"

Trigonometriska ettan

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

"Om vi vet sin x kan vi bestämma cos x"

exempel:

$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$

Konstant framför x i en trigekvation

$$\sin\left(\frac{v}{2}\right) = -0{,}520$$

Notera att vinkeln inte är v utan vinkeln är $\frac{v}{2}$.

$$\arcsin(-0{,}520) = -31{,}3^\circ$$

$$\frac{v}{2} = -31{,}3$$

Vinkeln har en period på 360° $\Longrightarrow$ $\frac{v}{2} = -31{,}3 + n \cdot 360$

Sinus $\Longrightarrow$ andra lösningen blir $\frac{v}{2} = 211{,}3 + n \cdot 360$

Nu kan vi lösa ut v genom att multiplicera med 2 på båda sidorna

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= -62{,}6 + n \cdot 720 \\ v_2 &= 422{,}6 + n \cdot 720 \end{aligned}}$$

Omskrivningar

$$\left.\begin{aligned} x &= n \cdot 180^\circ \\ x &= n \cdot 360^\circ \end{aligned}\right\} x = n \cdot 180^\circ$$

"Den ena täcker den andra"

$$\left.\begin{aligned} x &= n \cdot 180 \\ x &= 90 + n \cdot 180^\circ \end{aligned}\right\} x = n \cdot 90^\circ$$

"En ny som inefattar båda"

$\sin x = 0 \Longrightarrow x = n \cdot 180^\circ$

$\cos x = 0 \Longrightarrow x = 90 + n \cdot 180^\circ$

"Logiskt tänkande med hjälp av enhetscirkeln"

Divition med sin x

Ekvationen $\frac{\sin x}{3a} = \frac{\sin 2x}{4a}$

kan skrivas om till $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{4a}{3a}$

Nu måste vi undersöka 2 fall efter som $\sin x = 0$ kan vara en lösning till ekvationen (vilket det är) men vi får inte dividera med 0

Skills

$A \sin k(x+v) + B$

A = Amplituden = $\dfrac{\text{Största värdet} - \text{Minsta värdet}}{2}$

"Från vågräta symetrilinjen till en maximi/minimipunkt"

$k = \dfrac{360^\circ}{P}$ exempel: $P = 400^\circ$

"k avgör perioden, dvs hur ofta kurvan svänger"

B = Förskjutningen i y-led $B > 0 \uparrow$ $B < 0 \downarrow$

"Hur många steg upp eller ner den vågräta symetrilinjen har flyttat sig"

v = Förskjutningen i x-led $v > 0 \leftarrow$ $v < 0 \rightarrow$

"v är antalet grader kurvan är förskjuten i x-led"

Omskrivning till allmän form

$\sin 2x + 30^\circ = \sin(2(x+15^\circ))$

"Endast i den allmänna formen kan vi avgöra förskjutningen på kurvan"

Amplituden (A) kan $A \geq 0$ men konstanten

$\tan(180 - x) = -\tan x$

grader (a) $\longrightarrow$ radianer $a \cdot \dfrac{\pi}{180}$

radianer (a) $\longrightarrow$ grader $a \cdot \dfrac{180}{\pi}$

Skills

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$\frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ Kedjeregeln (Chai Ruuh)

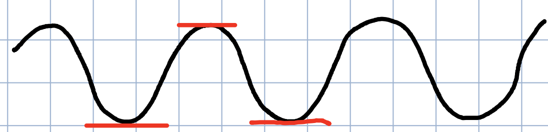
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Vid analys av max/min vårde för trig-funktion:

Sätt t ex $\sin(\text{Junk}) = -1$ eller $= 1$ (uppgift 2337)

Använd derivata för att hitta extrempunkter

Tänk även på att dessa extrempunkter är periodiska



Ibland måste man använda de trigonometriska identiteterna för att kunna derivera enklare

Derivatan av tan θ

$$f(x) = \tan\theta \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Skills

Derivatan av logaritmfunktioner

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} \Longrightarrow \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Om vi deriverar med hjälp av kvotregeln får vi:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln a - \ln x \cdot 0}{(\ln a)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\cancel{\ln a}}{\ln a \cdot \cancel{\ln a}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{x \cdot \ln a}}$$

Abs. belopp

$$|x| = |-(x)|$$

När man ska bestämma en abs. funktion så kommer det finnas TVÅ funktioner!

"Vecket" kommer att finna sig på c om funktionen är skriven |Funk| + c. (upg. 3226)

Vid ekvationer ska man ställa upp två olika fall samt Testa lösningarna för att hitta falska rötter.

En ekvation som ser ut

|Funk| = a , där a är en konstant

kommer inte att generera några falska rötter.

Samband mellan förändringshastigheter

Allting bygger på kedjeregeln $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ $V(r(t))$

Skriv upp så mycket du bara kan!

Grön – Den du vill få ut i enklare uppgifter

Röd – Denna tar du fram med hjälp av formen

Blå – Denna får du i uppgiften

DON'T FORGET

Radien har oftast ett samband med höjden i figurer vilket gör att man ibland måste substituera. (h = 2r)

Man kommer alltid att ha 2 färger.

Kolla viken enhet svaret borde vara i

Skriv ut enheterna för att göra det mer logiskt

Derivera svårare uttryck

$$y = f(x) \Longrightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Skills

Integraler

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin 3x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$$

$$\int \tan x \, dx = \ln|\cos x| + C$$

$$\int a^{kx} \, dx = \frac{a^{kx}}{k \cdot \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{f(x)} g(t) \, dt \right)$$

Man kan nästan säga att derivatan och integralen är varandras inverser. Därför kommer derivatan av en integral bli:

$$\frac{dy}{dx} = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

Exempel:

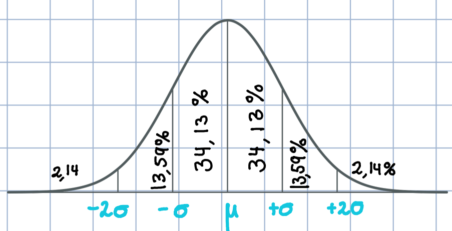
$$\frac{d}{dx}\left(\int_3^{x^2} \cos(\sqrt{t}) \, dt \right) = \cos(\sqrt{x^2}) \cdot 2x$$

$$= 2x\cos(x)$$ //

"Funkar" bc. Integralens Fundamentalsats

Sannorlikhetsfördelning

Normalfördelning



μ = Medelvärde

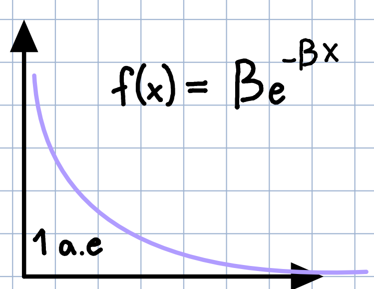
σ = Standardavvikelse

Beräkna intergralen

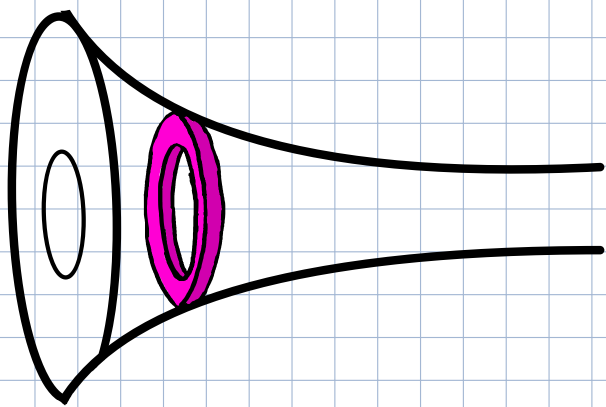
$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ avgör hur långt höger och vänster

Exponentialfördelning



Rotationsvolymer



Rotation runt

x-axeln: $\pi \int_a^b y^2 dx$

y-axeln: $\pi \int_a^b x^2 dy$

Vid rotationsvolymer med hål måste man vara noga att integralen ställs upp korrekt

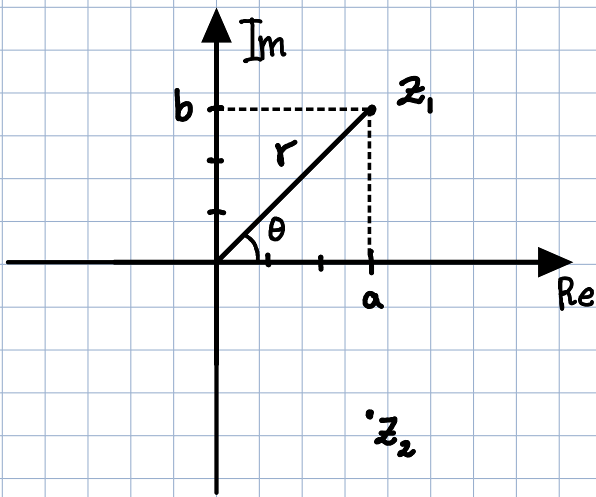
$$\pi \int_a^b (y_1)^2 - (y_2)^2 \, dx$$

Kolla övre och undre gräns!

Med samma tänk kan man avgöra en rotationskropps mantelarea.

$$dA = 2y \cdot \pi \cdot dx \Rightarrow \pi \int_a^b 2y \, dx$$

Skills Komplexa tal



Rektangulär form:

$z_1 = a + bi$ $\qquad |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\bar{z}_1 = z_2 = a - bi$ (konjugat)

Exponentiell form:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\Longrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

Skriv om båda leden på polär form om du ska lösa ekvationen $z^n = a$

Polär form:

Kordinaterna (r, θ) $\qquad \theta =$ argumentet $= \arctan \frac{b}{a}$

$z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Vid multiplikation av komplexa tal i polär form så multipliceras absolutbeloppen och argumenten adderas

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

Från polär form till rektangulär form:

$\cos\theta = \frac{a}{r} \Longleftrightarrow a = r \cdot \cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{r} \Longleftrightarrow b = r \cdot \sin\theta$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{rl}
x + 3 & \\
\hline
x^2 + 2x - 1 & \big| \; x - 1 \\
-(x^2 - x) & \\
\hline
0 + 3x - 1 & \\
-(\quad 3x - 3) & \\
\hline
2 &
\end{array}
$$

DON'T FORGET

Om ett polynom $p(z)$ har reella koefficienter och har en komplex rot (z_1), så kommer även konjugatet $(\bar{z}_1)$ vara en rot till ekvationen